Emmy Nöether

Colóquio de mulheres matemáticas por
Gleice Cristina e Ana Gracielle
DMAT-UFPE.

Amalie Emmy Nöether

Nasceu em 1882, filha do matemático judeu alemão Max Nöether. Estudou na universidade de Erlangen, onde o pai lecionava e onde havia apenas duas mulheres entre cerca de mil estudantes. Ao final do doutorado, lecionou por sete anos na universidade, sem salário.

Em 1915, foi convidada pelos grandes David Hilbert e Felix Klein a integrar o departamento de matemática. Professores da faculdade de história e filosofia se opuseram à contratação. “Seria inaceitável que os soldados chegassem da guerra para a universidade e encontrassem uma mulher dando aulas.” Hilbert refutou: “Não vejo como o sexo da candidata possa ser um argumento contra sua admissão como docente.’’ Em seus primeiros anos Emmy não tinha salário nem posição oficial.

A vida turbulenta

Por ser mulher, a instituição não permitiu que ela desse início para participar oficialmente do curso, mas a influência de seu pai fez com que ela fosse autorizada a assistir às aulas por dois anos. Depois, seu talento abriu portas para a realização de um exame que lhe permitiu iniciar um doutorado na área desejada, tornando-se uma aluna de fato.

Anos mais tarde, Nöether defendeu sua tese sob a supervisão do também matemático Paul Gordan, tornando-se a segunda mulher a obter um diploma na área de Matemática.

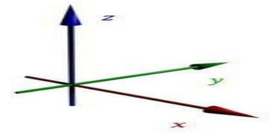
Carreira

O trabalho de Nöether pode ser dividido em três principais períodos. O primeiro durou de 1908 a 1919, quando ela fez contribuições significativas à teoria dos invariantes e dos corpos numéricos. O segundo período aconteceu entre 1920 e 1926, quando Nöether começou trabalhos que mudaram a face da álgebra abstrata. Isso porque em seu artigo chamado ‘’teoria de ideais no domínio dos anéis’’. transformou a teoria dos ideais em anéis comutativos em uma poderosa ferramenta matemática que serve para diversas aplicações. Já o terceiro período principal de seu trabalho foi o que ocupou os anos entre 1927 e 1935, e foi nessa época que Nöether conseguiu publicar seus principais trabalhos sobre álgebras não comutativas e números hipercomplexos, realizando a união entre a teoria das representações dos grupos com a teoria dos módulos e ideais. Além de ter publicado trabalhos autorais, Emmy também permitiu que outros matemáticos publicassem suas ideias e linhas de investigação, como por exemplo aplicações em topologia algébrica.

Resultados em EDO's

Emmy provou que toda grandeza física conservativa corresponde a um grupo contínuo de simetrias das equações. Simetria é entendida como uma transformação matemática que deixa as equações inalteradas em sua essência, sendo que todas as simetrias possíveis formam um grupo. Um grupo contínuo é um grupo de simetrias definidas por um número que pertence ao conjunto dos Reais.

Aplicações na Física



Teorema de Nöether: Informalmente, podemos apresentar o teorema de Noether dizendo que: "Para cada família de simetrias corresponde uma lei de conservação".

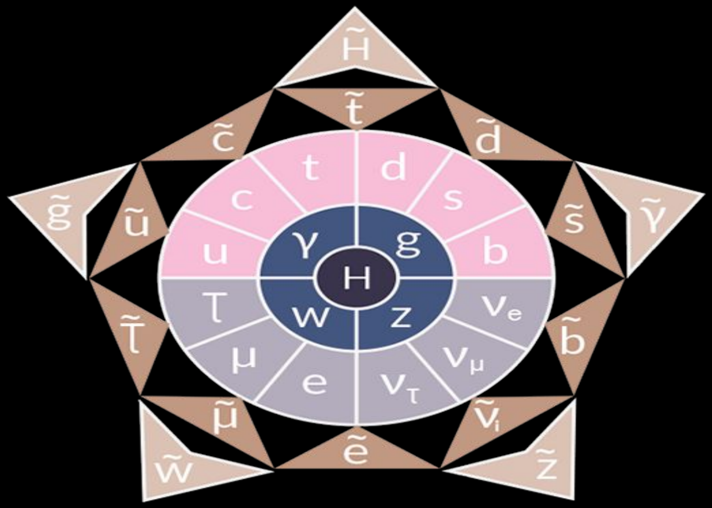
- Exemplo: Se a equação em questão for a segunda lei de Newton e a transformação for a rotação dos eixos espaciais x, y ou z na direção do eixo de simetria z por um ângulo (real) θ que formam um contínuo, então a grandeza física conservativa associada é o momento angular.
- Outros dois exemplos importantes são: a família de translações numa determinada direção do espaço leva a conservação da quantidade de movimento, e a simetria temporal implica a conservação da energia.

A conservação do momento, diz o teorema, está associada ao fato de que a física é a mesma aqui, como em qualquer outro lugar do universo.

Durante a segunda metade do século XX, o teorema de Nöether tornou-se uma fundação do modelo padrão da física de partículas, que descreve a natureza em escalas minúsculas e previu a existência do bóson de Higgs, uma partícula descoberta em 2012.

Modelo Padrão e simetrias...

Simetrias fundamentam o modelo padrão da física de partículas. Nesta representação, as partículas do modelo padrão, como fótons (γ) e elétrons (e), estão dentro do círculo. Em torno da borda externa estão as partículas hipotéticas mais pesadas propostas por uma teoria chamada supersimetria.



No Grande Colisor de Hádrons CERN, em Genebra, os físicos ainda estão em busca de novas partículas previstas pelas ideias de Nöether. Uma hipotética simetria oculta, apelidada de supersimetria, porque propõe um outro nível de simetria na física de partículas, postula que cada partícula conhecida tem um parceiro elusivo e mais pesado.

Vamos falar de Álgebra...

Teoremas de álgebra abstrata são poderosos pois são gerais; eles governam muitos sistemas. Poderia se imaginar que pouco pode ser concluído sobre objetos definidos com tão poucas propriedades, mas é exatamente aqui onde se destacavam os talentos de Nöether: descobrir o máximo que poderia ser concluído de um dado conjunto de propriedades, ou seja, identificar as propriedades essenciais, responsáveis por uma observação em particular.

Nosso interesse é por propriedades das operações de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Existem muitas, mas vamos destacar seis delas, que chamaremos de **axiomas de anel**:

(i) *Comutatividade da adição:*

$$a+b=b+a, \quad \forall a,b \in \mathbb{Z}.$$

(ii) *Associatividade da adição:*

$$(a+b)+c=a+(b+c), \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Z}.$$

(iii) *Existência de elemento neutro para a adição:*

$$0+a=a+0=a, \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$$

(iv) *Existência de elemento simétrico em relação à adição:*

Dado $a \in \mathbb{Z}$*, existe* $(-a) \in \mathbb{Z}$ *tal que* $a+(-a)=(-a)+a=0$.

(v) *Associatividade da multiplicação:*

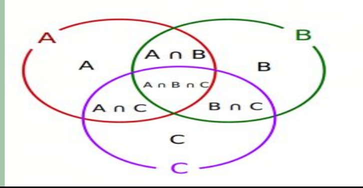
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Z}.$$

(vi) *Distributividade da multiplicação em relação à adição:*

- $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Z};$
- $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Z}.$

Pelo fato de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ satisfazer os axiomas acima, dizemos que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é um **anel**.

Exemplos:



Os inteiros formam um anel comutativo cujos elementos são os inteiros, e as operações são adição e multiplicação.

Os inteiros possuem propriedades adicionais que não se generalizam para todos os anéis comutativos. Um exemplo importante é o **Teorema Fundamental da Aritmética**, que diz: *todo inteiro positivo pode ser fatorado unicamente em inteiros primos*. Fatoração única não existe sempre em outros anéis, mas Noether encontrou um teorema de fatoração única, chamado de Teorema de Lasker–Nöether, para os ideais de muitos anéis. Muito desse trabalho se dedica em determinar que propriedades valem para todos os anéis, na concepção de resultados novos análogos a teoremas antigos sobre inteiros, e na determinação de conjuntos mínimos de suposições necessárias para obter certas propriedades de anéis.

O teorema de Lasker-Nöether afirma que todo anel noetheriano é um anel de Lasker, o que significa que todo ideal pode ser decomposto como uma interseção, chamada decomposição primária, de finitos ideais primários. O teorema foi provado pela primeira vez por Emanuel Lasker (1905) para o caso especial de anéis polinomiais e anéis convergentes de séries de potência, e também provado em toda sua generalidade por Emmy Nöether (1921).

O teorema é uma extensão do teorema fundamental da aritmética, e mais geralmente o teorema fundamental dos grupos abelianos finitamente gerados a todos os anéis noetherianos.

Uma das aplicações: O teorema de Lasker-Nöether desempenha um papel importante em geometria algébrica, afirmando que todo conjunto algébrico pode ser decomposto exclusivamente em uma união finita de componentes irredutíveis.

Enunciado:

- Seja R um anel comutativo noetheriano com unidade. Todo ideal em R é decomponível.

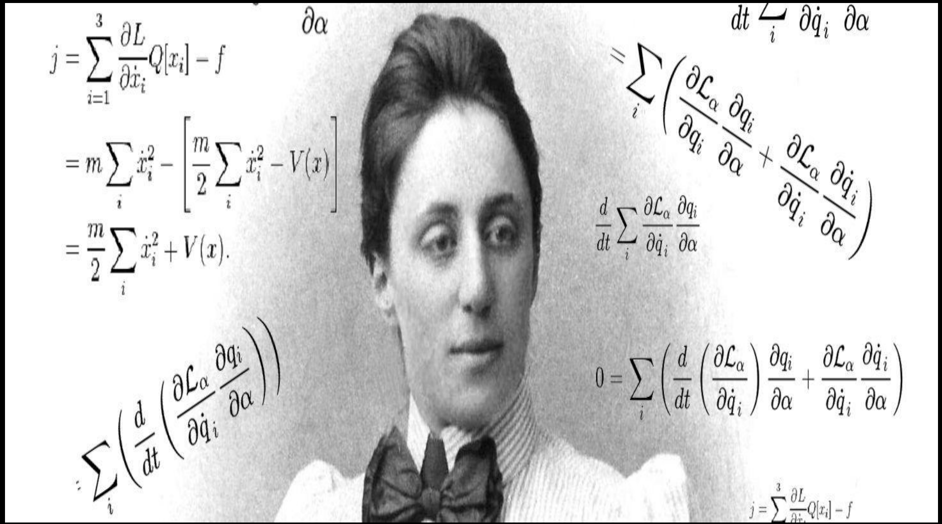
Prova.: Seja S o conjunto de todos os ideais de um anel noetheriano R, que <u>não</u> pode ser escrito como uma interseção finita de ideais irredutíveis. (Ou seja $S = \varnothing$). Suponha $S \neq \varnothing$. Então, qualquer cadeia de ideais $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots\ I_S$ em S deve terminar em um número finito de etapas, pois R é noetheriano. Digamos $I = I_n$ é o elemento máximo dessa cadeia. Como $I \in S$, não pode ser irredutível de modo que $I = J \cap K$, onde J e K são ideias contendo I.

Se $J \in S$, então I não seria o máximo na cadeia $\therefore$ $J \notin S$ e $K \notin S$, pela definição de S, J e K seriam interseções finitas de ideais irredutíveis. Mas isso implica que $I \notin S$ uma contradição. Então $S = \varnothing$.

Resiliência

A mulher que conseguiu mostrar ao mundo que a matemática não tinha segredos para as mulheres, que eram tão capazes quanto os homens, viveu uma vida de luta pelos direitos femininos na academia e é, até os dias de hoje, um exemplo de resiliência, e de força de vontade. Além disso, Emmy superou barreiras que iam além das questões de gênero, pelo fato de ter sido uma judia em uma Alemanha contaminada por uma onda de antissemitismo. Na ocasião de seu falecimento, Albert Einstein – o físico teórico e um dos cientistas mais importantes da história recente, que havia usado o trabalho de Nöether sobre a teoria dos invariantes para formular parte de seu trabalho com a relatividade – chegou a chamá-la de "o gênio matemático criativo mais significativo já produzido desde que a educação superior para mulheres foi iniciada".

Uma singela homenagem...



"My methods are really methods of working and thinking; this is why they have crept in everywhere anonymously."

As alunas Gleice Cristina e Ana Gracielle agradecem a presença de todos.

Referências

IMPA, “Emmy Noether, 'pai' da álgebra moderna”. Disponível em: <https://impa.br/noticias/emmy-noether-pai-da-algebra-moderna/>. Acesso em: 26 de Outubro de 2019.

WIKIPÉDIA, “Primary decomposition”. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Primary_decomposition>. Acesso em: 26 de Outubro de 2019.