Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya

Silvia Sastre-Gómez

Departamento de Matemática
Universidade Federal de Pernambuco

Colóquio de Mulheres Matemáticas, Dmat- UFPE
25 de outubro, 2019

Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya (1922–2004)

- Nasceu em 7 de março de 1922, em Kologriv, Rússia.
- Seu pai era professor de matemática numa escola local.
- Ele encorajou muito Olga à estudar matemáticas.

Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya (1922–2004)

- Pertencia a uma família da antiga nobreza russa.
- Isso causou-lhe a perseguição do regime de Stalin.
- O pai de Olga foi preso e condenado à morte sem julgamento acusado de ser inimigo do povo.
- Olga (com quinze anos) pôde continuar estudando na escola, mas não foi admitida na Universidade de Leningrado.
- As duas irmãs, expulsas da escola, não tiveram a mesma fortuna.

Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya (1922–2004)

- Quando terminou a Escola Normale, retornou como professora na escola onde seu pai havia ensinado.
- Em 1943 entra na Universidade de Moscu.
- Estudou álgebra, teoria dos números e equações em derivadas parciais.
- Rússia estava no meio da Segunda Guerra Mundial.
- O talento dela emocionou os professores que permitiram ela participar de seminários, sem seguir outras disciplinas obrigatórias nas que ela já excedia em muito.
- No quarto ano da universidade, organizou um seminário para jovens em Equações em Derivadas Parciais.

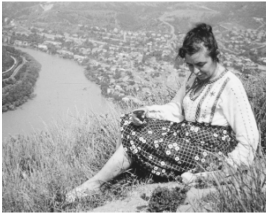
Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya (1922–2004)

- En 1951 tinha terminado a Tese de Doutorado orientada por Ivan Petrovsky y Sergéi Sóbolev.
- Não conseguiu defendé-lha até a morte de Stalin em 1953.
- En 1954 Professora na universidade.
- Em 1956 Professora Titular na Universidade de São Petersburgo.
- 1954 –1961 Diretora do Laboratório de Física-Matemática no Instituto de Matemática Steklov.

Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya (1922–2004)

- Escreveu mais de 250 artigos matemáticos.
- sobre Equações em Derivadas Parciais:
  - Equações hiperbólicas.
  - Equações Diferenciais geradas por funções simétricas dos autovalores do Hessiano.
  - Unicidade e Convergência das séries de Fourier.
  - Aproximação de soluções com diferenças finitas.
  - Problemas estacionários não lineares usando a Teoria do Grau de Leray-Schauder.
  - Atratores das Equações Dissipativas.
- Autora de seis monografias:
  - “Equações elípticas lineares e quaselineares”, escreveu em conjunto com sua aluna Nina Ural’tseva.

Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya (1922–2004)



- 1969 The State Prize of the USSR.
- 1985 Membro extrangeiro da Deutsche Akademie Leopoldina, Alemanha.
- 1989 Membro da Accademia Nazionale dei Lincei, Italia.
- 1990 Membro da Russian Academy of Science.
- 2002 Great Gold Lomonosov Medal of the Russian Academy.
- 2002 Doctoris Honoris Causa, University of Bonn.

Desigualdade de interpolação

Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com suporte compacto.

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^4 dx \leq 4 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 \, dx \right)$$

- A constante é independente do suporte de u.
- A desigualdade de interpolação foi obtida também por Gagliardo e Nirenberg na mesma época que Ladyzhenskaya. (Sua motivação era o estudo de equações elípticas lineares).
- A professora Ladyzhenskaya chegou à desigualdade estudando o sistema de Navier Stokes não-linear.

Prova da desigualdade de interpolação

Seja $x = (x_1, x_2)$, então para $i = 1, 2$ temos

$$u^2(x_1, x_2) = 2\int_{-\infty}^{x_i} u\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i \leq 2\int_{-\infty}^{+\infty} |u|\,|\nabla u|\,dx_i$$

Pelo Teorema de Fubini e a desigualdade de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^2} u^4(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x_1, x_2)u^2(x_1, x_2)dx_1 dx_2$$

$$\leq 4\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|u|\,|\nabla u|\,dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|u|\,|\nabla u|\,dx_2\right)dx_1 dx_2$$

$$= 4\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|u|\,|\nabla u|\,dx_1 dx_2\right)^2 = 4\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u|\,|\nabla u|\,dx\right)^2$$

$$\leq 4\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2 dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2\,dx\right).$$

A matemática nos fluidos

- Além do grande **interesse físico**, e de todos os tipos de aplicações práticas, a **compreensão do movimento da água** e dos fluidos em geral levou a um ramo muito rico da matemática que reside entre a **matemática pura** e **aplicada**.
- A pesquisa no campo da dinâmica dos fluidos é muito interessante no sentido de que se é constantemente obrigado a **usar técnicas** de **vários ramos da matemática.**
- É uma **área muito atual** de pesquisa matemática, com **muitas questões abertas** interessantes e importantes.

A matemática nos fluidos

- A dinâmica dos fluidos é parte da **pesquisa interdisciplinar**: trabalhar nesse campo permite a um grande escopo colaborar com pesquisadores trabalhando em diferentes ramos da ciência, como **experimentalistas, físicos, engenheiros**.
- Um exemplo da interdisciplinaridade é o famoso matemático russo Kolmogorov passou **vários meses em uma expedição marítima** fazendo medições ao desenvolver sua **teoria da turbulência**!

Navier-Stokes. Problema do milênio do Instituto Clay

Para qualquer velocidade inicial $u_0 = (u_0^1, u_0^2, u_0^3)$ periódica em cada variável espacial e com divergência zero
existe um campo de velocidade suave

$$u = \left(u^1, u^2, u^3\right) : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$$

e uma distribuição de pressão suave associada

$$p : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R},$$

periódicos em $\mathbf{x}$, satisfazendo as equações de Navier-Stokes

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + u \cdot \nabla u^i = \Delta u^i - \frac{\partial p}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{2}$$

$$u = u_0 \quad \text{em } t = 0. \tag{3}$$

Problema do milênio do Clay Institute Navier-Stokes

- O prêmio será concedido a quem apresentar um exemplo de dado inicial suave, de divergência zero, u_0, de modo que o problema admita ou não uma solução suave (u, p).
- A Professora Ladyzhenskaya provavelmente não teria concordado com esta formulação do problema. Para ela, em vez da existência e a regularidade, o principal problema é a existência e a unicidade (well-posedness).

Unicidade de solução para a equação de Navier-Stokes

Multiplicando a equação (1) pela função test u e devido à equação (2), temos que os termos não lineares e da pressão satisfazem

$$\sum_{i=1}^{n}\left(u\cdot\nabla u^i+\frac{\partial p}{\partial x^i}\right)u^i = u\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}|u|^2+p\right)=\nabla\cdot\left(u(\frac{1}{2}|u|^2+p)\right).$$

Integrando em $\mathbb{R}^n$ integrando por partes obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^2dx+\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\,dx=0.$$

Integrando em relação ao tempo temos a identidade de energia

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u|^2dx+2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}|u_0|^2dx=:E(u_0) \qquad (4)$$

Unicidade de solução para a equação de Navier-Stokes

Seja $n = 2$

Sejam u e v soluções de (1)-(3) num intervalo $[0, T]$ como o mesmo dado inicial $u = v = u_0$ em $t = 0$. Seja

$$w = v - u.$$

Vamos provar a unicidade de solução provando que

$$w = 0 \quad \text{então} \quad u = v.$$

Unicidade de solução para a equação de Navier-Stokes

Subtraindo a equação de u da equação de v, e multiplicando por w, integrando em $\mathbb{R}^2$ e integrando por partes, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2}|w|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2}|\nabla w|^2 dx = -\int_{\mathbb{R}^2}(w, w\cdot\nabla u)dx.$$

Pela desigualdade de Hölder temos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}(w, w\cdot\nabla u)dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^2}|w||w||\nabla u|dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|w|^4 dx\right)^{1/2}$$

Unicidade de solução para a equação de Navier-Stokes

Portanto

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{L^2}^2 + \|\nabla w\|_{L^2}^2 \leq \left|\int_{\mathbb{R}^2}(w, w\cdot\nabla u)dx\right| \leq \|\nabla u\|_{L^2}\|w\|_{L^4}^2$$

Pela desigualdade de interpolação para $n = 2$, temos que

$$\|w\|_{L^4}^2 \leq 2\|w\|_{L^2}\|\nabla w\|_{L^2}$$

Como $2|ab| \leq a^2 + b^2$, a estimativa fica

$$\|\nabla u\|_{L^2}\|w\|_{L^4}^2 \leq 2\|w\|_{L^2}\|\nabla w\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2} \leq \|w\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla w\|_{L^2}^2$$

Usando a desigualdade acima obtemos

$$\frac{d}{dt}\|w\|_{L^2}^2 \leq 2\|w\|_{L^2}^2\|\|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

Pelo Lema de Grönwall e a identidade de energia (4) temos que

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 \leq \|w(0)\|_{L^2}^2 e^{2\int_0^t\|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 ds} \leq \|w(0)\|_{L^2}^2 e^{\|u_0\|_{L^2}^2} = 0$$

Referências

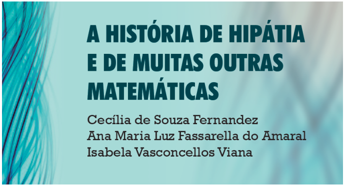
1. Struwe, Michael, Olga Ladyshenskaya. A life-long devotion to mathematics, Laudatio, May 13, 2002; **“Geometric Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations”, Springer Verlag, 2003, pp. 1-10.**
2. Susan Friedlander, Peter Lax, Cathleen Morawetz, Louis Nirenberg, Gregory Seregin, Nina Ural’tseva, and Mark Vishik, Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya (1922-2004), **Notices Amer. Math. Soc. 51 (2004), no. 11, 1320-1331.**
3. Friedlander, Susan, and Keyfitz, Barbara. Olga Ladyzhenskaya y Olga Oleinik: dos grandes matemáticas del siglo XX. **La Gaceta de la RSME, 73, 621-628, (2004).**

Professoras responsáveis pelo Colóquio de Mulheres Matemáticas:

- Cleide Soares Martins Gomes: cleide@dmat.ufpe.br
- Jalila Rios dos Santos: jalila@dmat.ufpe.br
- Liliana Gabriela Gheorghe: liliana@dmat.ufpe.br
- Silvia Sastre: silvia.sastre@dmat.ufpe.br

Próximas palestras:

- Hipátia de Alexandria (370-415 d.C.)
- Marie-Sophie Germain (Paris, 1776-1831)
- Emmy Noether (Alemanha, 1882-1935)
- Maria Laura Mouzinho Leite Lopes(Timbaúba-PE, 1917-2013)
- . . .
- Debates sobre gênero e ciência.



[1]

[1] https://www.sbm.org.br/publicacoes/publicacoes-para-download/colecao-simposios-de-matematica

Obrigada pela sua atenção!